Diploma Programme
Programme du diplôme
Programa del Diploma

Matemáticas
Nivel superior
Prueba 3 – Análisis

Miércoles 9 de mayo de 2018 (tarde)

1 hora

Instrucciones para los alumnos

- No abra esta prueba hasta que se lo autoricen.
- Conteste todas las preguntas.
- Salvo que se indique lo contrario en la pregunta, todas las respuestas numéricas deberán ser exactas o aproximadas con tres cifras significativas.
- En esta prueba es necesario usar una calculadora de pantalla gráfica.
- Se necesita una copia sin anotaciones del **cuadernillo de fórmulas de matemáticas NS y de ampliación de matemáticas NS** para esta prueba.
- La puntuación máxima para esta prueba de examen es **[50 puntos]**.

2218 – 7228

Por favor comience cada pregunta en una página nueva. No se otorgará necesariamente la máxima puntuación a una respuesta correcta que no esté acompañada de un procedimiento. Las respuestas deben estar sustentadas en un procedimiento o en explicaciones. En particular, junto a los resultados obtenidos con calculadora de pantalla gráfica, deberá reflejarse por escrito el procedimiento seguido para su obtención; por ejemplo, si se utiliza un gráfico para hallar una solución, se deberá dibujar aproximadamente el mismo como parte de la respuesta. Aun cuando una respuesta sea errónea, podrán otorgarse algunos puntos si el método empleado es correcto, siempre que aparezca por escrito. Por lo tanto, se aconseja mostrar todo el procedimiento seguido.

1. [Puntuación máxima: 10]

(a) Sabiendo que $n > \ln n$ para $n > 0$, utilice el criterio de comparación para mostrar que la serie $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\ln(n+2)}$ es divergente. [3]

(b) Halle el intervalo de convergencia de $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(3x)^n}{\ln(n+2)}$. [7]

2. [Puntuación máxima: 6]

La función f se define mediante

$$f(x) = \begin{cases} |x-2|+1 & x < 2 \\ ax^2 + bx & x \ge 2 \end{cases}$$

donde a y b son constantes reales.

Sabiendo que tanto f como su derivada son continuas en $x = 2$, halle el valor de a y el valor de b.

3. [Puntuación máxima: 11]

(a) Halle el valor de $\int_4^{\infty} \frac{1}{x^3}\, \mathrm{d}x$. [3]

(b) Represente gráficamente la inecuación $\sum_{n=5}^{\infty} \frac{1}{n^3} < \int_4^{\infty} \frac{1}{x^3}\, \mathrm{d}x < \sum_{n=4}^{\infty} \frac{1}{n^3}$. [4]

(c) A partir de lo anterior, escriba un límite inferior para $\sum_{n=4}^{\infty} \frac{1}{n^3}$. [1]

(d) Halle un límite superior para $\sum_{n=4}^{\infty} \frac{1}{n^3}$. [3]

4. [Puntuación máxima: 11]

La función f viene dada por $f(x) = (\text{arcsen}\, x)^2$, $-1 \le x \le 1$.

(a) Muestre que $f'(0) = 0$. [2]

La función f satisface la ecuación $\left(1 - x^2\right) f''(x) - x f'(x) - 2 = 0$.

(b) Derive la ecuación anterior dos veces para mostrar que

$$\left(1 - x^2\right) f^{(4)}(x) - 5x f^{(3)}(x) - 4 f''(x) = 0,$$

donde $f^{(3)}(x)$ y $f^{(4)}(x)$ son, respectivamente, la derivada 3.ª y la derivada 4.ª de $f(x)$. [4]

(c) A partir de lo anterior, muestre que la serie de Maclaurin de $f(x)$ hasta el término en x^4 inclusive es $x^2 + \frac{1}{3}x^4$. [3]

(d) Utilice esta aproximación mediante una serie para $f(x)$, con $x = \frac{1}{2}$, para hallar un valor aproximado para π^2. [2]

5. [Puntuación máxima: 12]

Considere la ecuación diferencial $x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} - y = x^p + 1$, donde $x \in \mathbb{R}$, $x \ne 0$ y p es un número entero positivo, $p > 1$.

(a) Resuelva la ecuación diferencial sabiendo que para $x = 1$, $y = -1$. Dé la respuesta en la forma $y = f(x)$. [8]

(b) (i) Muestre que las coordenadas x de los puntos de la curva $y = f(x)$ en donde $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 0$ satisfacen la ecuación $x^{p-1} = \frac{1}{p}$.

(ii) Deduzca el conjunto de valores de p para los cuales existen dos puntos de la curva $y = f(x)$ donde $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 0$. Dé una razón que justifique su respuesta. [4]